Extensões e Aplicações do Modelo Conway-Maxwell-Poisson para Modelagem de Dados de Contagem

Eduardo Elias Ribeiro Junior
Orientação: Prof. Dr. Walmes Marques Zeviani

Trabalho de Conclusão de Curso - Laboratório B
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

18 de agosto de 2016

Sumário

1
Introdução

Dados de contagem

São variáveis aleatórias que representam o número de ocorrências de um evento em um domínio discreto ou contínuo.

Se Y é uma variável aleatória de contagem, $y = 0, 1, 2, \ldots$

Dados de contagem

São variáveis aleatórias que representam o número de ocorrências de um evento em um dominío discreto ou contínuo.

Se Y é uma variável aleatória de contagem, $y = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplos em Medicina:

- Número de ocorrências de uma doença por município em um ano;
- Número de admissões em um hospital por mês;
- Número de linfócitos em 1mm^3 de sangue.
- …

Abordagens comuns para análise

- Modelos de regressão Gaussianos com dados transformados

Abordagens comuns para análise

- Modelos de regressão Gaussianos com dados transformados
  - Dificultam a interpretação dos resultados;
  - Não contemplam a natureza discreta da variável;
  - Não contemplam a relação média e variância;
  - Transformação logarítmica é problemática para valores 0.

Abordagens comuns para análise

- Modelos de regressão Gaussianos com dados transformados
    - Dificultam a interpretação dos resultados;
    - Não contemplam a natureza discreta da variável;
    - Não contemplam a relação média e variância;
    - Transformação logarítmica é problemática para valores 0.

- Modelos de regressão Poisson (NELDER; WEDDERBURN, 1972)

Abordagens comuns para análise

- Modelos de regressão Gaussianos com dados transformados
  - Dificultam a interpretação dos resultados;
  - Não contemplam a natureza discreta da variável;
  - Não contemplam a relação média e variância;
  - Transformação logarítmica é problemática para valores 0.

- Modelos de regressão Poisson (NELDER; WEDDERBURN, 1972)
  - Fiel a natureza dos dados;
  - Contempla a relação média e variância;
  - Suposição de equidispersão ($E(X) = V(X)$).
  - Produz erros padrões inconsistentes (WINKELMANN; ZIMMERMANN, 1994).

Dispersão em dados de contagem

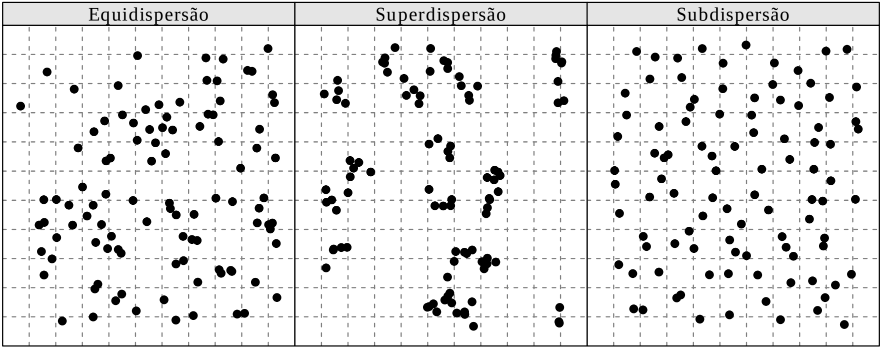


Figura : Ilustração de processos pontuais que levam a contagens com diferentes níveis de dispersão.

1.1

Introdução

Distribuições de probabilidades

Tabela : Distribuições de probabilidades para dados de contagem

Distribuição	Contempla a característica de		
	Equidispersão	Superdispersão	Subdispersão
Poisson	✓		
Binomial Negativa	✓	✓	
Inverse Gaussian Poisson	✓	✓	
Compound Poisson	✓	✓	
Poisson Generalizada	✓	✓	✓
Gamma-Count	✓	✓	✓
COM-Poisson	✓	✓	✓
Katz	✓	✓	✓
Poisson Polynomial	✓	✓	✓
Double-Poisson	✓	✓	✓
Lagrangian Poisson	✓	✓	✓

Tabela : Distribuições de probabilidades para dados de contagem

Distribuição	Contempla a característica de		
	Equidispersão	Superdispersão	Subdispersão
Poisson	✓		
Binomial Negativa	✓	✓	
Inverse Gaussian Poisson	✓	✓	
Compound Poisson	✓	✓	
Poisson Generalizada	✓	✓	✓
Gamma-Count	✓	✓	✓
COM-Poisson	✓	✓	✓
Katz	✓	✓	✓
Poisson Polynomial	✓	✓	✓
Double-Poisson	✓	✓	✓
Lagrangian Poisson	✓	✓	✓

Modelo Poisson

Função massa de probabilidade

$$\Pr(Y = y \mid \lambda) = \frac{\lambda^y}{y! e^\lambda} \quad y = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Propriedades

- $\frac{P(Y=y-1)}{P(Y=y)} = \frac{y}{\lambda}$
- $E(Y) = \lambda$
- $V(Y) = \lambda$

Modelo Poisson

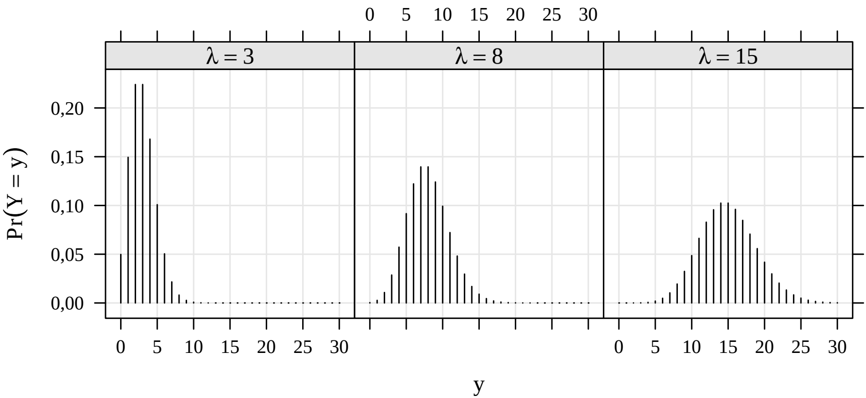


Figura : Probabilidades pela distribuição Poisson para diferentes parâmetros.

Modelo Binomial Negativo

Função massa de probabilidade

$$\Pr(Y = y \mid \mu, \theta) = \frac{\Gamma(\theta + y)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\theta)} \left(\frac{\mu}{\mu+\theta}\right)^{y} \left(\frac{\theta}{\mu+\theta}\right)^{\theta}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Propriedades

- $E(Y) = \mu$
- $V(Y) = \mu + \mu^2/\theta$

Casos particulares

- Aproximadamente Poisson, quando $\theta \to \infty$
- Distribuição Geométrica, quando $\theta = 1$

Modelo Binomial Negativo

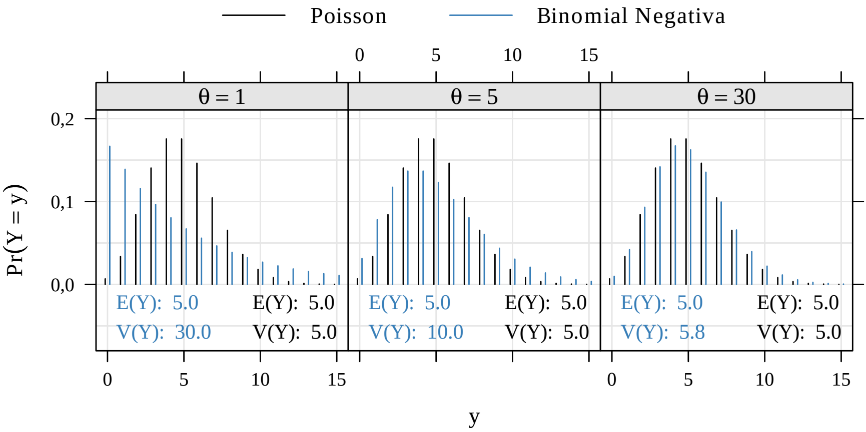


Figura : Probabilidades pela distribuição Binomial Negativa para diferentes níveis de dispersão, fixando a média em 5.

Modelo COM-Poisson

Função massa de probabilidade

$$\Pr(Y = y \mid \lambda, \nu) = \frac{\lambda^y}{(y!)^\nu Z(\lambda, \nu)} \quad y \in \mathbb{Z}_+ \tag{3}$$

em que $Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}$; e $\lambda > 0$ e $\nu \geqslant 0$

Propriedades

- $\frac{P(Y=y-1)}{P(Y=y)} = \frac{y^\nu}{\lambda}$
- $E(Y) \approx \lambda^{\frac{1}{\nu}} - \frac{\nu-1}{2\nu}$
- $V(Y) \approx \frac{1}{\nu} E(Y)$

Casos particulares

- Distribuição Poisson, quando $\nu = 1$
- Distribuição Bernoulli, quando $\nu \to \infty$
- Distribuição Geométrica, quando $\nu = 0, \ \lambda < 1$

Modelo COM-Poisson

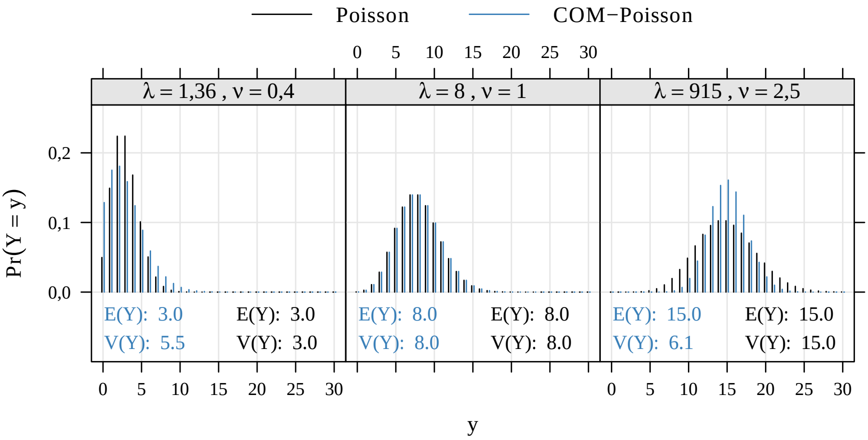


Figura : Probabilidades pela distribuição COM-Poisson para diferentes parâmetros.

Modelo COM-Poisson

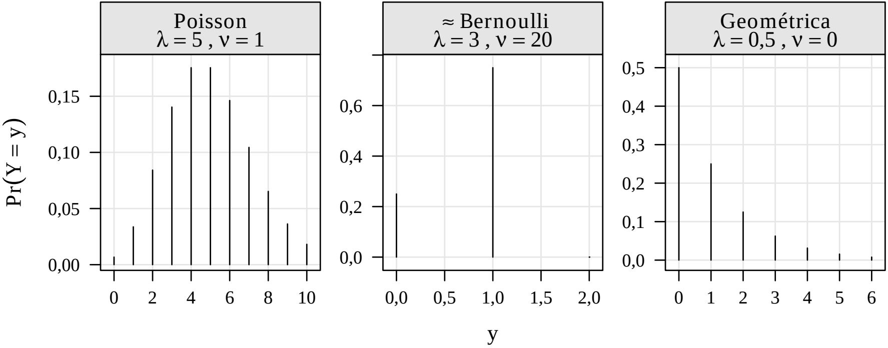


Figura : Exemplos de casos particulares da distribuição COM-Poisson.

1.2

Introdução

Modelos de regressão

Ideia geral

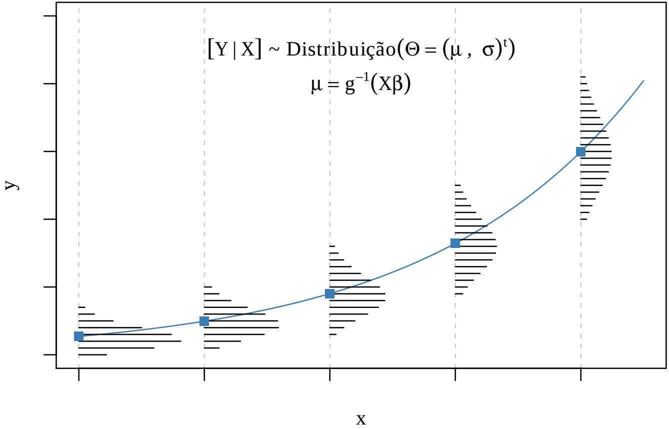


Figura : Exemplificação de um modelo de regressão.

Regressão para dados de Contagem

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias condicionalmente independentes, dado o vetor de covariáveis $\underline{x}_i^t = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$;

Regressão para dados de Contagem

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias condicionalmente independentes, dado o vetor de covariáveis $\underline{x}_i^t = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$;

- **Regressão log-linear Poisson**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$$
$$\log(\mu_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

Regressão para dados de Contagem

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias condicionalmente independentes, dado o vetor de covariáveis $\underline{x}_i^t = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$;

- **Regressão log-linear Poisson**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$$
$$\log(\mu_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

- **Regressão Binomial Negativa**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{Binomial Negativa}(\mu_i, \theta)$$
$$\log(\mu_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

Regressão para dados de Contagem

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias condicionalmente independentes, dado o vetor de covariáveis $\underline{x}_i^t = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$;

- **Regressão log-linear Poisson**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$$
$$\log(\mu_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

- **Regressão Binomial Negativa**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{Binomial Negativa}(\mu_i, \theta)$$
$$\log(\mu_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

- **Regressão COM-Poisson**

$$Y_i \mid \underline{x}_i \sim \text{COM-Poisson}(\lambda_i, \nu)$$
$$g(E(Y_i \mid \underline{x}_i)) = \log(\lambda_i) = \underline{x}_i^t \beta$$

2
Materiais e Métodos

2.1

Materiais e Métodos

Materiais

Conjuntos de dados

- Capulhos de algodão sob desfolha artificial;
- Produtividade de algodão sob infestação de Mosca-branca;
- Produtividade de soja sob umidade e adubação potássica;
- Ocorrência de ninfas de Mosca-branca em lavoura de soja;
- Peixes capturados por visitantes de um parque Estadual;
- Número de nematoides em raizes de feijoeiro.

Conjuntos de dados

- Capulhos de algodão sob desfolha artificial;
- Produtividade de algodão sob infestação de Mosca-branca;
- Produtividade de soja sob umidade e adubação potássica;
- Ocorrência de ninfas de Mosca-branca em lavoura de soja;
- Peixes capturados por visitantes de um parque Estadual;
- Número de nematoides em raizes de feijoeiro.

Recursos computacionais

Software R versão 3.3.1. Principais pacotes:

- `MASS` - 7.3.45: ajuste dos modelos binomial negativo;
- `pscl` - 1.4.9: ajuste dos modelos para excesso de zeros;
- `lme4` - 1.1.12: ajuste dos modelos Poisson com efeito aleatório Normal;
- `bbmle` - 1.0.18: ajuste de modelos via máxima verossimilhança.

Recursos computacionais

Software R versão 3.3.1. Principais pacotes:

- `MASS` - 7.3.45: ajuste dos modelos binomial negativo;
- `pscl` - 1.4.9: ajuste dos modelos para excesso de zeros;
- `lme4` - 1.1.12: ajuste dos modelos Poisson com efeito aleatório Normal;
- `bbmle` - 1.0.18: ajuste de modelos via máxima verossimilhança.

Relatório do TCC, inteiramente reproduzível:

- Distribuição LaTeX - 3.14 (2013/Debian): para editoração do texto;
- `knitr` - 1.13: para mesclar códigos R ao texto.
- `Git` - 1.9.1: como sistema de versionamento.

2.2

Materiais e Métodos

Métodos

Estimação via máxima verossimilhança

1. Escreva a função de verossimilhança - $\mathcal{L}(\Theta \mid \underline{y})$
2. Tome seu logaritmo - $\ell(\Theta \mid \underline{y})$
3. As estimativas dos parâmetros são $\hat{\Theta} = \arg\max_{\Theta} \ell(\Theta \mid \underline{y})$

[1] IWLS para os parâmetros de locação e Newton Raphson para o parâmetro de dispersão.

Estimação via máxima verossimilhança

1. Escreva a função de verossimilhança - $\mathcal{L}(\Theta \mid \underline{y})$
2. Tome seu logaritmo - $\ell(\Theta \mid \underline{y})$
3. As estimativas dos parâmetros são $\hat{\Theta} = \arg\max_{\Theta} \ell(\Theta \mid \underline{y})$

- Algoritmo IWLS (*Interactive Weigthed Leasts Squares*) para os modelos Poisson e Binomial Negativo[1]; e
- Método *BFGS* para os modelos COM-Poisson.

[1] IWLS para os parâmetros de locação e Newton Raphson para o parâmetro de dispersão.

Reparametrização do modelo COM-Poisson

Para garantir o espaço paramétrico do modelo nos reais, faz-se $\phi = \log(\nu)$.

- $\phi < 0 \Rightarrow$ Superdispersão;
- $\phi = 0 \Rightarrow$ Equidispersão; e
- $\phi > 0 \Rightarrow$ Subdispersão

Reparametrização do modelo COM-Poisson

Para garantir o espaço paramétrico do modelo nos reais, faz-se $\phi = \log(\nu)$.

- $\phi < 0 \Rightarrow$ Superdispersão;
- $\phi = 0 \Rightarrow$ Equidispersão; e
- $\phi > 0 \Rightarrow$ Subdispersão

Log-verossimilhança

$$\ell(\phi, \beta \mid \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\lambda_i) - e^{\phi} \sum_{i=1}^{n} \log(y!) - \sum_{i=1}^{n} \log(Z(\lambda_i, \phi))$$

em que $\lambda_i = e^{\underline{x}_i^t \beta}$, sendo $\underline{x}_i^t$ o vetor $(x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{ip})$ de covariáveis da i-ésima observação, e $(\beta, \phi) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

Comparação de modelos

- **log-verossimilhança maximizada**
  Maximum log-likelihood

$$\ell(\hat{\Theta} \mid \underline{y})$$

- **Critério de Informação de Akaike**
  Akaike Criterion Information (AIC)

$$\text{AIC} = 2(k - \ell(\hat{\Theta}_k, \underline{y}))$$

- **Teste de razão de verossimilhanças**
  Likelihood Ratio Test (LRT)

$$\text{TRV} = 2\left(\ell(\hat{\Theta}_p, \underline{y}) - \ell(\hat{\Theta}_q, \underline{y})\right) \sim \chi^2_{p-q}$$

- **Valores preditos para a média**
  Confidence Intervals

3

Resultados

3.1

Resultados
Pacote R

Implementação do pacote cmpreg

```
## Pode ser instalado do GitHub
devtools::install_git("https://github.com/JrEduardo/cmpreg.git")
library(cmpreg)

## Regressão (efeitos fixos)
cmp(y ~ preditor, data = data)

## Regressão com componente de barreira
hurdlecmp(y ~ count_pred | zero_pred, data = data)

## Regressão (efeitos aleatórios)
mixedcmp(y ~ count_pred + (1 | ind.ranef), data = data)
```

Implementação do pacote cmpreg

```
## Pode ser instalado do GitHub
devtools::install_git("https://github.com/JrEduardo/cmpreg.git")
library(cmpreg)

## Regressão (efeitos fixos)
cmp(y ~ preditor, data = data)

## Regressão com componente de barreira
hurdlecmp(y ~ count_pred | zero_pred, data = data)

## Regressão (efeitos aleatórios)
mixedcmp(y ~ count_pred + (1 | ind.ranef), data = data)
```

Funções método e conjuntos de dados disponíveis

```
## Datasets
data(package = "cmpreg")

## Principais funções método
summary(model1)           ## Estimativas e testes de Wald
anova(model1, model2)     ## TRV's entre modelos encaixados
cmptest(model1)           ## TRV para H0: phi = 0
residuals(model1)         ## Resíduos (ordinários e pearson)
predict(model1)           ## Predição (pontual, intervalar)
```

3.2

Resultados

Caso subdisperso

Capulhos de algodão

Experimento conduzido em casa de vegetação, motivação para (ZEVIANI et al., 2014).

- Objetivo: avaliar o efeito de desfolha na produção de algodão;
- Covariáveis experimentais:
  - Estágio fenológico da planta (`est`) (vegetativo, botão floral, florescimento, maça e capulho);
  - Nível de desfolha aplicada (`des`) (0, 25, 50, 75 e 100%).
- Variável resposta:
  - Número de capulhos produzidos.
- Unidade experimental: vaso com duas plantas;
- Delineamento: Inteiramente casualizado (5 repetições);

Análise descritiva

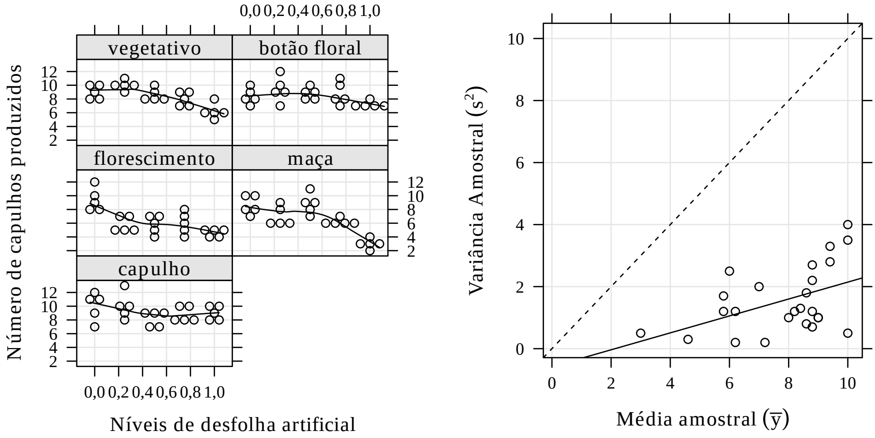


Figura : Disposição das contagens para cada combinação dos fatores (esquerda) e médias e variâncias amostrais (direita).

Modelagem

Preditores considerados:

- Preditor 1: $g(\mu) = \beta_0$
- Preditor 2: $g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 \text{des}$
- Preditor 3: $g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 \text{des} + \beta_2 \text{des}^2$
- Preditor 4: $g(\mu) = \beta_0 + \beta_{1j} \text{des} + \beta_2 \text{des}^2$
- Preditor 5: $g(\mu) = \beta_0 + \beta_{1j} \text{des} + \beta_{2j} \text{des}^2$

j variando nos níveis de estágio fenológico da planta.

Modelos concorrentes:

- Poisson(μ)
- COM-Poisson(λ, ϕ)
- Quasi-Poisson(μ, σ^2)

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$		
Preditor 1	1	-279,93	561,87				
Preditor 2	2	-272,00	548,00	1	0,0001		
Preditor 3	3	-271,35	548,71	1	0,2556		
Preditor 4	7	-258,67	531,35	4	0,0000		
Preditor 5	11	-255,80	533,61	4	0,2193		
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$	$P(>\chi^2)$
Preditor 1	2	-272,48	548,96			0,551	1,13E-04
Preditor 2	3	-257,46	520,93	1	0,0000	0,794	6,97E-08
Preditor 3	4	-256,09	520,18	1	0,0973	0,816	3,29E-08
Preditor 4	8	-220,20	456,40	4	0,0000	1,392	1,75E-18
Preditor 5	12	-208,25	440,50	4	0,0001	1,585	1,80E-22
Quase-Poisson	np	deviance*	AIC	diff np	$P(>F)$	$\hat{\sigma}^2$	$P(>\chi^2)$
Preditor 1	1	75,51				0,567	3,66E-04
Preditor 2	2	59,65		1	0,0000	0,464	5,13E-07
Preditor 3	3	58,36		1	0,0962	0,460	3,66E-07
Preditor 4	7	33,00		4	0,0000	0,278	9,15E-16
Preditor 5	11	27,25		4	0,0002	0,241	3,57E-18

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(> \chi^2)$		
Preditor 1	1	-279,93	561,87				
Preditor 2	2	-272,00	548,00	1	0,0001		
Preditor 3	3	-271,35	548,71	1	0,2556		
Preditor 4	7	-258,67	531,35	4	0,0000		
Preditor 5	11	-255,80	533,61	4	0,2193		
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(> \chi^2)$	$\hat{\phi}$	$P(> \chi^2)$
Preditor 1	2	-272,48	548,96			0,551	1,13E-04
Preditor 2	3	-257,46	520,93	1	0,0000	0,794	6,97E-08
Preditor 3	4	-256,09	520,18	1	0,0973	0,816	3,29E-08
Preditor 4	8	-220,20	456,40	4	0,0000	1,392	1,75E-18
Preditor 5	12	-208,25	440,50	4	0,0001	1,585	1,80E-22
Quase-Poisson	np	deviance*	AIC	diff np	$P(> F)$	$\hat{\sigma}^2$	$P(> \chi^2)$
Preditor 1	1	75,51				0,567	3,66E-04
Preditor 2	2	59,65		1	0,0000	0,464	5,13E-07
Preditor 3	3	58,36		1	0,0962	0,460	3,66E-07
Preditor 4	7	33,00		4	0,0000	0,278	9,15E-16
Preditor 5	11	27,25		4	0,0002	0,241	3,57E-18

Valores preditos

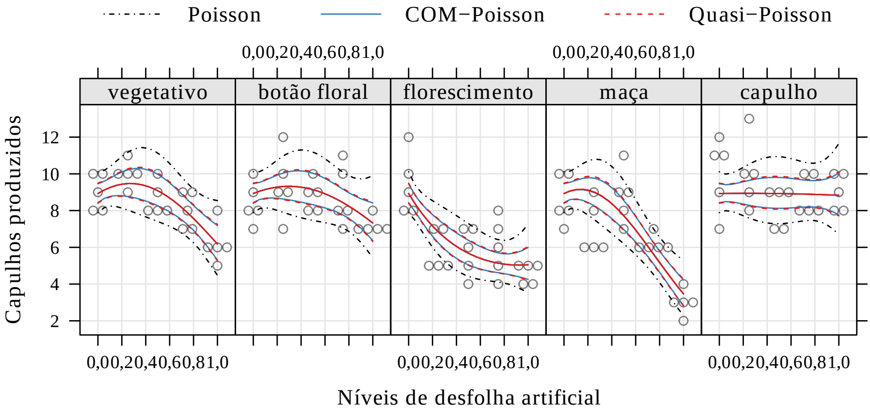


Figura : Curva dos valores preditos com intervalo de confiança de (95%).

3.3

Resultados

Caso superdisperso

Grãos de soja

Experimento conduzido em casa de vegetação.

- Objetivo: avaliar a produtividade de soja sob solos com diferentes características;
- Covariáveis experimentais:
  - Umidade do solo (`umid`)
    (37,5, 62,5 e 62,5%).
  - Nível de adubação potássica (`K`)
    (0, 30, 60, 120 e 180 mg·dm^{-3});
  - Indicador de blocagem (`bloc`)
    (I, II, III, VI, V).
- Variável resposta:
  - Número de grãos de soja por u.e.
  - Número de vagens de soja por u.e.
- Unidade experimental: vaso com duas plantas;
- Delineamento: Blocos casualizados completos;

Análise descritiva

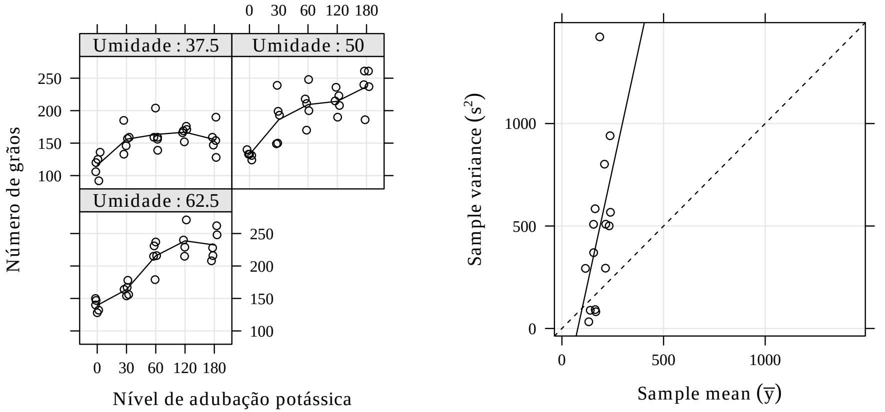


Figura : Disposição do número de grãos nas combinações dos fatores (esquerda) e médias e variâncias amostrais (direita).

Modelagem

Preditores considerados:

- Preditor 1: $g(\mu_{ijk}) = \beta_0 + \tau_i + \gamma_j + \delta_k$
- Preditor 2: $g(\mu_{ijk}) = \beta_0 + \tau_i + \gamma_j + \delta_k + \alpha_{jk}$

τ_i é o efeito do i-ésimo bloco;
γ_j o efeito do j-ésimo nível de umidade aplicado;
δ_k o efeito do k-ésimo nível de adubação potássica; e
α_{jk} o efeito da interação entre o j-ésimo nível de umidade do solo e o k-ésimo nível de adubação potássica.

Modelos concorrentes:

- Poisson(μ_{ijk})
- COM-Poisson(λ_{ijk}, ϕ)
- Binomial-Negativo(μ_{ijk}, θ)
- Quasi-Poisson(μ_{ijk}, σ^2)

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

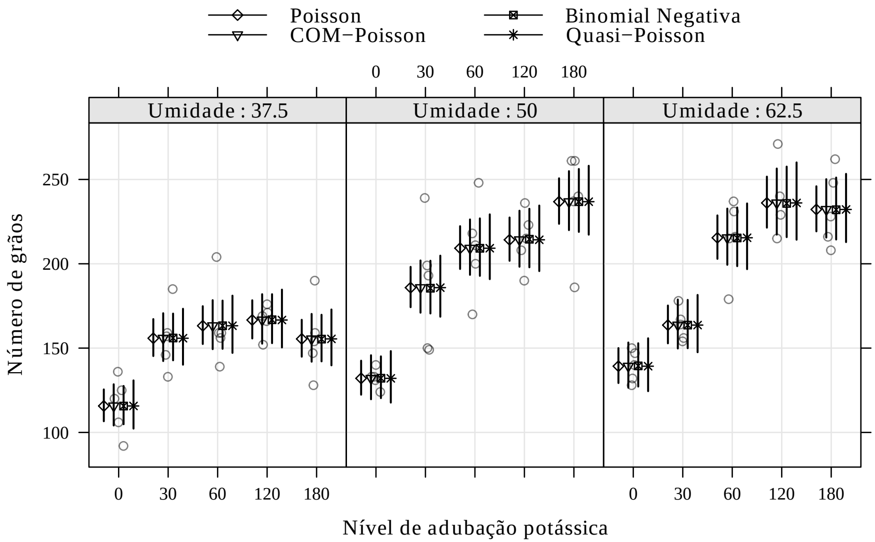
Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	
Preditor 1	11	-343,16	708,33			
Preditor 2	19	-321,67	681,34	8	8,83E-07	
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$
Preditor 1	12	-326,61	677,21			-0,817
Preditor 2	20	-315,64	671,29	8	0,0051	-0,518
Binomial-Negativo	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>F)$	$\hat{\theta}$
Preditor 1	12	-326,54	677,07			141,51
Preditor 2	20	-315,39	670,77	8	0,0044	260,94
Quasi-Poisson	np	deviance*	AIC	diff np	$P(>F)$	$\hat{\sigma}^2$
Preditor 1	11	167,71				2,707
Preditor 2	19	124,72		8	0,0300	2,289

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(> \chi^2)$	
Preditor 1	11	-343,16	708,33			
Preditor 2	19	-321,67	681,34	8	8,83E-07	
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(> \chi^2)$	$\hat{\phi}$
Preditor 1	12	-326,61	677,21			-0,817
Preditor 2	20	-315,64	671,29	8	0,0051	-0,518
Binomial-Negativo	np	ℓ	AIC	diff np	$P(> F)$	$\hat{\theta}$
Preditor 1	12	-326,54	677,07			141,51
Preditor 2	20	-315,39	670,77	8	0,0044	260,94
Quasi-Poisson	np	deviance*	AIC	diff np	$P(> F)$	$\hat{\sigma}^2$
Preditor 1	11	167,71				2,707
Preditor 2	19	124,72		8	0,0300	2,289

Valores preditos



3.4

Resultados

Caso equidisperso

Vagens de soja

Experimento conduzido em casa de vegetação.

- Objetivo: avaliar a produtividade de soja sob solos com diferentes características;
- Covariáveis experimentais:
  - Umidade do solo (`umid`)
    (37,5, 62,5 e 62,5%).
  - Nível de adubação potássica (`K`)
    (0, 30, 60, 120 e 180 mg$\cdot$dm^{-3});
  - Indicador de blocagem (`bloc`)
    (I, II, III, VI, V).
- Variável resposta:
  - Número de grãos de soja por u.e.
  - Número de vagens de soja por u.e.
- Unidade experimental: vaso com duas plantas;
- Delineamento: Blocos casualizados completos;

Análise descritiva

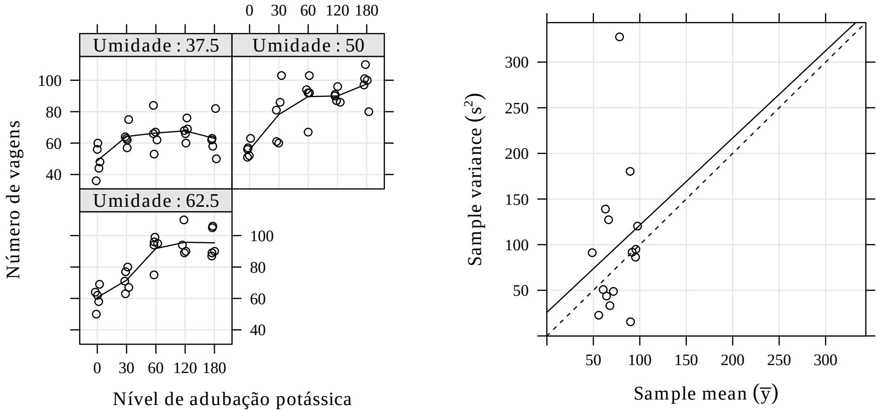


Figura : Disposição do número de grãos nas combinações dos fatores (esquerda) e médias e variâncias amostrais (direita).

Modelagem

Preditores considerados:

- Preditor 1: $g(\mu_{ijk}) = \beta_0 + \tau_i + \gamma_j + \delta_k$
- Preditor 2: $g(\mu_{ijk}) = \beta_0 + \tau_i + \gamma_j + \delta_k + \alpha_{jk}$

τ_i é o efeito do i-ésimo bloco;
γ_j o efeito do j-ésimo nível de umidade aplicado;
δ_k o efeito do k-ésimo nível de adubação potássica; e
α_{jk} o efeito da interação entre o j-ésimo nível de umidade do solo e o k-ésimo nível de adubação potássica.

Modelos concorrentes:

- Poisson(μ_{ijk})
- COM-Poisson(λ_{ijk}, ϕ)
- Binomial-Negativo(μ_{ijk}, θ)
- Quasi-Poisson(μ_{ijk}, σ^2)

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

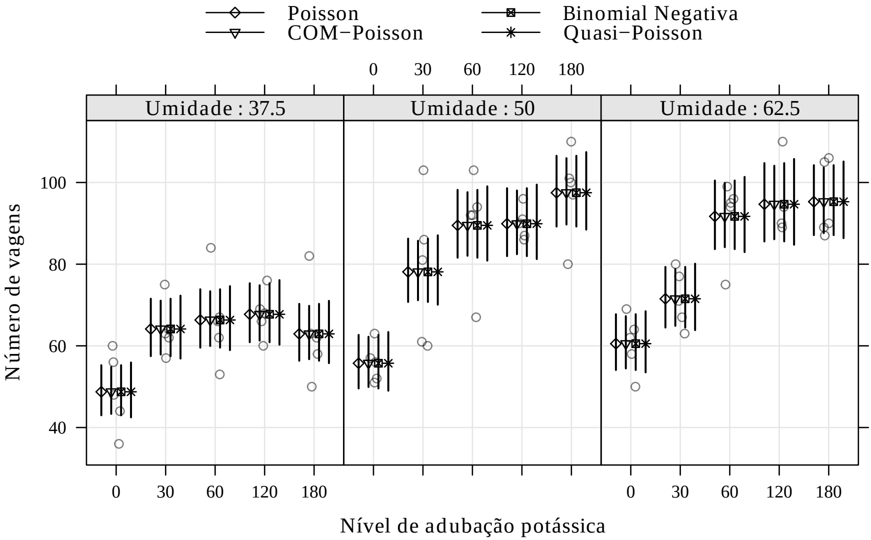
Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	
Preditor 1	11	-266,69	555,38			
Preditor 2	19	-259,62	557,23	8	0,0779	
COM-Poisson	**np**	ℓ	**AIC**	**diff np**	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$
Preditor 1	12	-266,60	557,20			-0,067
Preditor 2	20	-259,33	558,65	8	0,0685	0,129
Binomial-Negativo	**np**	ℓ	**AIC**	**diff np**	$P(>F)$	$\hat{\theta}$
Preditor 1	12	-266,69	557,37			4,6E+03
Preditor 2	20	-259,62	559,23	8	0,0782	1,0E+06
Quasi-Poisson	**np**	**deviance***	**AIC**	**diff np**	$P(>F)$	$\hat{\sigma}^2$
Preditor 1	11	79,43				1,279
Preditor 2	19	65,28		8	0,1875	1,199

Medidas de ajuste

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação de modelos

Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	
Preditor 1	11	-266,69	555,38			
Preditor 2	19	-259,62	557,23	8	0,0779	
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$
Preditor 1	12	-266,60	557,20			-0,067
Preditor 2	20	-259,33	558,65	8	0,0685	0,129
Binomial-Negativo	np	ℓ	AIC	diff np	$P(>F)$	$\hat{\theta}$
Preditor 1	12	-266,69	557,37			4,6E+03
Preditor 2	20	-259,62	559,23	8	0,0782	1,0E+06
Quasi-Poisson	np	deviance*	AIC	diff np	$P(>F)$	$\hat{\sigma}^2$
Preditor 1	11	79,43				1,279
Preditor 2	19	65,28		8	0,1875	1,199

Valores preditos



4

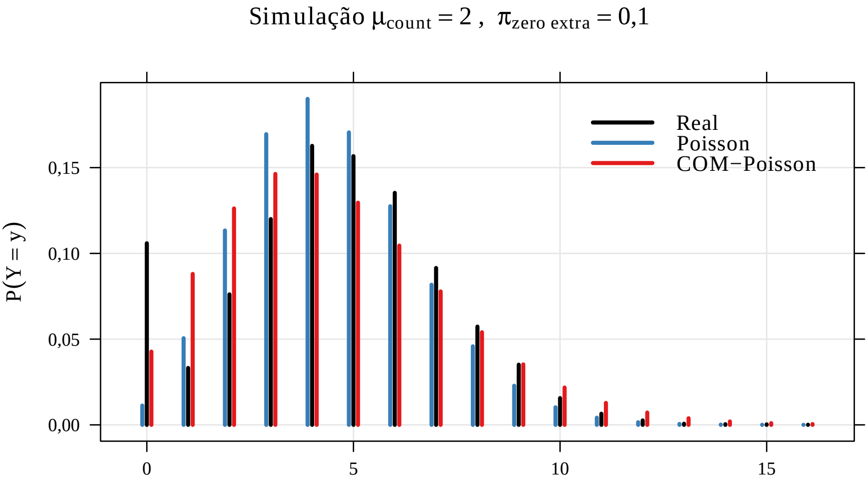
Extensões

4.1

Extensões

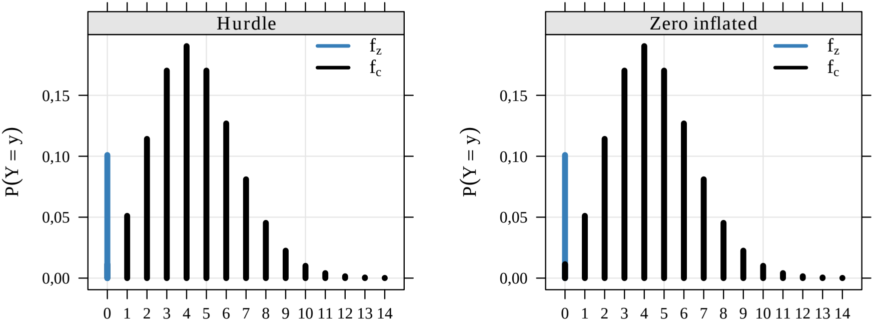
Modelos para excesso de zeros

Motivação


Simulação $\mu_{count} = 2$, $\pi_{zero\ extra} = 0{,}1$
Real
Poisson
COM−Poisson
P(Y = y)
0,00
0,05
0,10
0,15
0
5
10
15

Gerador de dados

- Dois processos compõem a geração dos dados.



Modelo Hurdle COM-Poisson

Função massa de probabilidade de um modelo Hurdle

$$\Pr(Y = y \mid \pi, \Theta_c) = \begin{cases} \pi & \text{, se } \; y = 0\,; \\ (1-\pi)\dfrac{\Pr(Z = z \mid \Theta_c)}{1 - \Pr(Z = 0 \mid \Theta_c)} & \text{, se } \; y = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Modelo Hurdle COM-Poisson

Função massa de probabilidade de um modelo Hurdle

$$\Pr(Y = y \mid \pi, \Theta_c) = \begin{cases} \pi & \text{, se } \ y = 0\,; \\ (1-\pi)\dfrac{\Pr(Z = z \mid \Theta_c)}{1 - \Pr(Z = 0 \mid \Theta_c)} & \text{, se } \ y = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Verossimilhança

$$\mathcal{L}(\phi, \beta, \gamma \mid \underline{y}) = \prod_{i \in \Omega_0} [\pi_i] \prod_{i \in \Omega_+} \left[(1 - \pi_i) \left(\frac{\lambda_i^{y_i}}{(y_i!)^{e^\phi} Z(\lambda_i, \phi)} \right) \left(1 - \frac{1}{Z(\lambda_i, \phi)} \right) \right]$$

Sendo

- $\Omega_0 = \{i \mid y_i = 0\}$
- $\Omega_+ = \{i \mid y_i > 0\}$
- $\underline{\pi} = \frac{\exp(Z\gamma)}{1+\exp(Z\gamma)}$
- $\underline{\lambda} = \exp(X\beta)$

Aplicação

- Estudo observacional com o objetivo de modelar o número de peixes capturados por atividade de pesca esportiva.

Aplicação

- Estudo observacional com o objetivo de modelar o número de peixes capturados por atividade de pesca esportiva.

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação

Poisson	np	ℓ	AIC	2(diff ℓ)	diff np	$P(>\chi^2)$	
Preditor 1	7	-857,48	1728,96				
Preditor 2	10	-744,58	1509,17	225,79	3	1,1E-48	
Binomial Neg.	**np**	ℓ	**AIC**	**2(diff ℓ)**	**diff np**	$P(>\chi^2)$	$\hat{\theta}$
Preditor 1	8	-399,79	815,58				0,20
Preditor 2	11	-393,72	809,44	12,14	3	0,0069	0,37
COM-Poisson	**np**	ℓ	**AIC**	**2(diff ℓ)**	**diff np**	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$
Preditor 1	8	-409,85	835,71				-8,77
Preditor 2	11	-402,30	826,59	15,12	3	0,0017	-3,77

Valores preditos

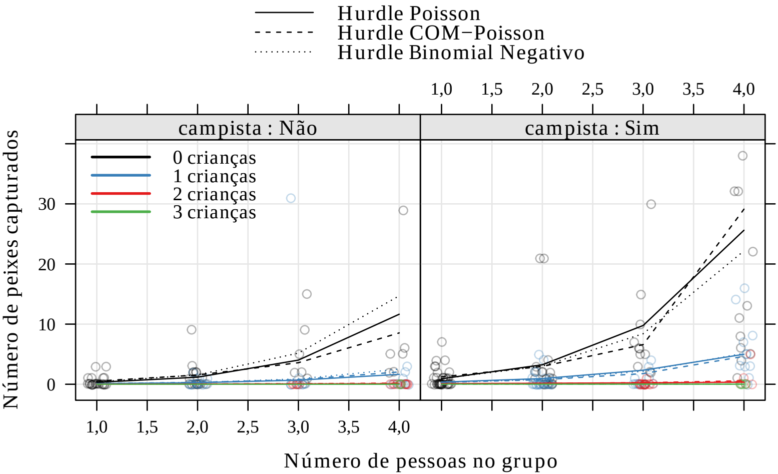


Figura : Valores preditos do número de peixes capturados.

4.2

Extensões

Modelos de efeitos aleatórios

Motivação

- Correlação entre grupos de indivíduos induzida pelo delineamento experimental/amostral ou estrutura do problema.

Motivação

- Correlação entre grupos de indivíduos induzida pelo delineamento experimental/amostral ou estrutura do problema.

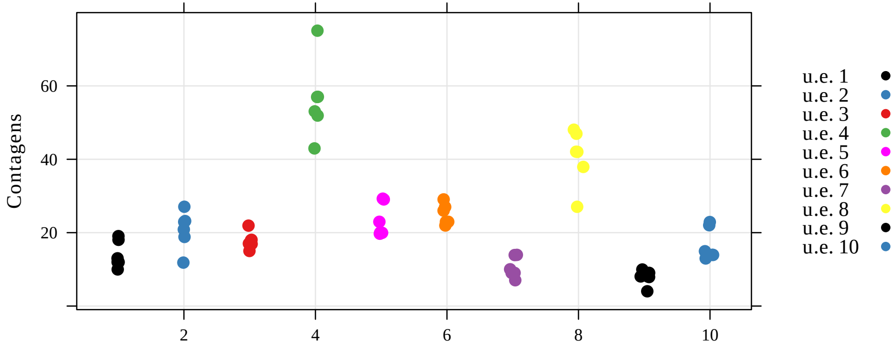


Figura : Contagens que apresentam um efeito aleatório da unidade experimental (u.e.)

Modelo COM-Poisson Misto

Estrutura hierárquica do modelo

$$
\begin{aligned}
Y \mid b &\sim f_*(\mu, \phi)\\
g(\mu) &= X\beta + Zb\\
b &\sim N(0, \Sigma)
\end{aligned}
$$

Verossimilhança

$$
\mathcal{L}(\phi, \Sigma, \beta \mid \underline{y}) = \prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \frac{\underline{\lambda}^y}{(y!)^{e^\phi} Z(\underline{\lambda}, \phi)} \right) \cdot (2\pi)^{q/2} |\Sigma| \exp\left(-\frac{1}{2} b^t \Sigma^{-1} b \right) db
$$

- $\underline{\lambda} = \exp(X\beta)$;
- $j = 1, 2, \dots, n_i$ (observações em cada grupo)
- $i = 1, 2, \dots, m$ (grupos com efeitos aleatórios comuns);

Aplicação

- Estudo experimental do IAPAR sobre a resistência de linhagens de feijoeiro à contaminação de nematóides.

Aplicação

- Estudo experimental do IAPAR sobre a resistência de linhagens de feijoeiro à contaminação de nematóides.

Tabela : Medidas de ajuste para avaliação e comparação

Poisson	np	ℓ	AIC	2(diff ℓ)	diff np	$P(>\chi^2)$		
Preditor 1	2	-237,20	478,40					
Preditor 2	3	-234,00	474,00	6,40	1	0,0114		
COM-Poisson	np	ℓ	AIC	2(diff ℓ)	diff np	$P(>\chi^2)$	$\hat{\phi}$	$P(>\chi^2)$
Preditor 1	3	-236,85	479,71				0,15	0,4060
Preditor 2	4	-233,16	474,31	7,40	1	0,0065	0,24	0,1935

Valores preditos

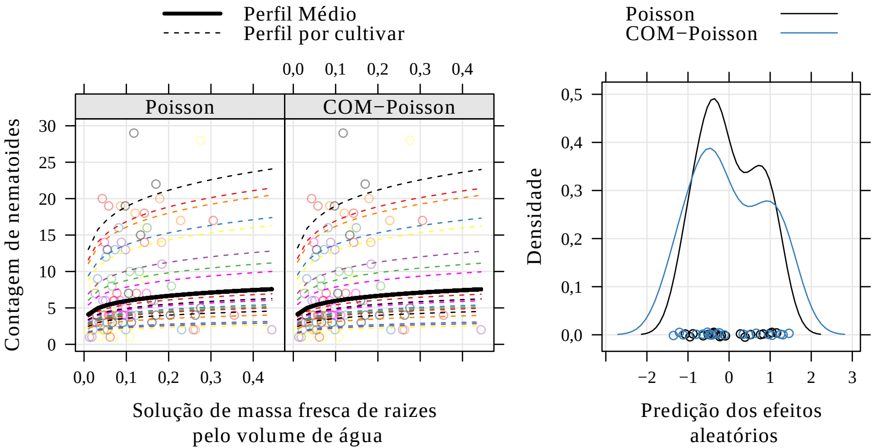


Figura : Valores preditos nos modelos de efeitos mistos.

5
Conclusões

Conclusões

Análise de dados de contagem:

- Modelo Poisson inadequado na maioria das aplicações, mostrando que a suposição de equidispersão é de fato restritiva;
- Modelos alternativos ao Poisson devem ser empregados na análise de dados de contagem; e
- Sugere-se o modelo COM-Poisson como alternativa totalmente paramétrica e bastante flexível.

Conclusões

Aplicação do modelo COM-Poisson:

- Resultados similares aos providos pela abordagem semi-paramétrica via quasi-verossimilhança;
- A não ortogonalidade entre os parâmetros de locação e precisão no modelo COM-Poisson se mostra como característica da distribuição;
- A simetria nos perfis de verossimilhança do parâmetro de precisão também; e
- A avaliação da constante de normalização é uma dificuldade computacional do modelo.

Trabalhos futuros

Sugestões para continuidade da pesquisa:

- Estudar reparametrizações do modelo COM-Poisson;
- Avaliar aproximações da constante de normalização;
- Realizar estudos de simulação para avaliar a robustez do modelo;
- Implementar o modelo COM-Poisson inflacionado de zeros; e
- Expandir o modelo COM-Poisson de efeitos aleatórios:

Publicização

⟨**https://stats-cwr.github.io/stats4med/**⟩

`cmpreg`: Implementação computacional em formato de pacote R.
⟨https://github.com/JrEduardo/cmpreg⟩

`monografia`: Redação do relatório e scripts de análise. Tudo reproduzível.
⟨https://github.com/JrEduardo/monografia⟩

Referências

CONWAY, R. W.; MAXWELL, W. L. A queuing model with state dependent service rates. *Journal of Industrial Engineering*, v. 12, p. 132—-136, 1962.

NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, v. 135, p. 370–384, 1972.

PAULA, G. A. *Modelos de regressão com apoio computacional*. IME-USP São Paulo, 2013. Disponível em: ⟨https://www.ime.usp.br/{~}giapaula/textoregressao.h⟩.

Ribeiro Jr, P. J. et al. Métodos computacionais para inferência com aplicações em R. In: *20º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*. [s.n.], 2012. p. 282. Disponível em: ⟨http://leg.ufpr.br/doku.php/cursos:mcie⟩.

SHMUELI, G. et al. A useful distribution for fitting discrete data: Revival of the Conway-Maxwell-Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistics*, v. 54, n. 1, p. 127–142, 2005. ISSN 00359254.

WINKELMANN, R.; ZIMMERMANN, K. F. *Count data models for demographic data*. 1994. 205–221, 223 p.

ZEVIANI, W. M. et al. The Gamma-count distribution in the analysis of experimental underdispersed data. *Journal of Applied Statistics*, n. October, p. 1–11, 2014. ISSN 0266-4763. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1080/02664763.2014.922168⟩.